Physique générale : quantique, Série 11

Assistants et tuteurs :

davide.bertolusso@epfl.ch gaia.bolognini@epfl.ch jonas.daverio@epfl.ch
filippo.ferrari@epfl.ch lorenzo.fioroni@epfl.ch khurshed.fitter@epfl.ch
pietro.giugiaro@epfl.ch noe.salmeron@epfl.ch sara.alvesdossantos@epfl.ch
cedric.willemin@epfl.ch

Exercice 1 : Un atome "muonique"

Les atomes muoniques sont des atomes où un des électrons est remplacé par un muon dont la masse vaut 206 fois la masse de l'électron et sa charge est égale à celle de l'électron. Considérons un atome muonique ^{131}Xe (Z=54), *c.-à-d. un atome de* ^{131}*Xe où un des électrons a été remplacé par un muon.* Que vaut la probabilité de trouver ce muon à l'intérieur du noyau de xénon, si on suppose que le muon se trouve dans l'état fondamental de cet atome (état 1s) ? Le rayon du noyau R peut être trouvé par la formule $R = r_0 A^{1/3}$ où $r_0 = 1.22 \times 10^{-15}$ m est le rayon d'un nucléon, et A est le nombre de nucléons (donc protons plus neutrons). Est-ce que les caractéristiques chimiques de cet atome muonique correspondent à celles d'un atome « normal » de xénon, de césium ($Z = 55$) ou d'iode ($Z = 53$) ? Indication : utilisez l'expression pour le rayon de Bohr $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ mais adaptée pour des particules d'une masse autre que celle de l'électron et pour un noyau de charge Ze.

Exercice 2 : Atome d'hydrogène : Effet de la masse réduite

L'expression générale pour les valeurs propres de l'énergie d'un atome avec un seul électron est

$$E_n = -\frac{\mu k_e^2 q_1^2 q_2^2}{2\hbar^2 n^2} ,$$

Ici μ est la *masse réduite* de l'atome, donnée par $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, où m_1 est la masse de l'électron et m_2 est la masse du noyau ; k_e est la constante de Coulomb ; q_1 et q_2 sont les charges de l'électron et du noyau respectivement.

La longueur d'onde associée à la transition entre les niveaux $n = 3$ et $n = 2$ de l'atome d'hydrogène est $\lambda = 656.3$ nm (dans la région de la lumière visible rouge).

1. Calculer la longueur d'onde pour la même transition, dans le cas où l'atome est celui du "positronium". Le positronium est l'atome formé par un électron et un anti-électron, appelé "positron". Le positron a la même masse de l'électron et charge égale et opposée.
2. Calculer la longueur d'onde pour la même transition, dans le cas où l'atome est le ion de hélium He^+.

Exercice 3 : Les isotopes

Les atomes du même élément chimique mais avec des différents nombres de neutrons dans le noyau sont appelés *isotopes*. Le gaz d'hydrogène est typiquement un mélange de deux isotopes : l'hydrogène-1, avec un noyau fait par un proton, et l'hydrogène-2 autrement appelé deutérium, avec un noyau fait par un proton et un neutron. Les spectres d'émission des deux isotopes montrent des lignes à presque les mêmes longueurs d'onde, avec des toutes petites différences.

1. Utiliser l'expression donnée dans le problème précédent pour montrer que la différence entre les longueurs d'onde des émissions de l'hydrogène-1 et le deutérium est

$$\lambda_H - \lambda_D = \left(1 - \frac{\mu_H}{\mu_D}\right) \lambda_H \, ,$$

2. Trouver la différence entre les longueurs d'onde de la première ligne de la série de Balmer de l'hydrogène (celle pour la transition de $n = 3$ à $n = 2$) qui a longueur d'onde $\lambda_H = 656.3$ nm pour l'hydrogène-1. Cette différence a été mesurée pour la première fois en 1931, donnant ainsi la preuve de l'existence du deutérium.

Exercice 4 : Le rayon de l'atome d'hydrogène

La fonction d'onde de l'électron dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène est donnée par

$$\psi_{100}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \, .$$

La probabilité que l'électron se trouve dans un élément de volume sphérique d'épaisseur dr à la distance r du noyau est

$$P(r)dr = \left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right) e^{-2r/a_0} dr \, .$$

1. Calculer la valeur la plus probable du rayon r d'un électron dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène.
2. Calculer la probabilité que l'électron se trouve à une distance du noyau plus grande que le rayon le plus probable qu'on vient de calculer.
3. Calculer maintenant la valeur moyenne (espérance) de la distance de l'électron du noyau. Comment ce résultat se compare avec celui du point 1 ? Pourquoi ?

Exercice 5 : Question de type examen

Le rayon du proton est $r_p = 0.833 \times 10^{-15}$m. On considère l'atome de hydrogène dans son état fondamental. Quelle est la probabilité que l'électron se trouve à une distance r du proton telle que $0 < r < r_p$? On rappelle que la fonction d'onde de l'état fondamental de l'atome de hydrogène est $\psi_{100}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$, où $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_r k_e e^2}$ est le rayon de Bohr.

1. $p = 5.21 \times 10^{-15}$
2. $p = 1.57 \times 10^{-5}$
3. $p = 0$
4. $p = 1.23 \times 10^{-19}$

Exercice 6 : Question de type examen

La fonction d'onde de l'électron dans l'état $2s$ de l'atome de hydrogène est

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \tag{1}$$

où a_0 est le rayon de Bohr. On rappelle ici que la densité de probabilité en fonction de r pour un état $\psi(r)$ de forme sphérique est donnée par $P(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2$. Calculer la probabilité p de trouver l'électron à une distance du noyau $r > 4a_0$. Données :

$$\int \mathrm{d}x \;\; x^2 e^{-x} = -e^{-x}\big(x^2 + 2x + 2\big),$$
$$\int \mathrm{d}x \;\; x^3 e^{-x} = -e^{-x}\big(x^3 + 3x^2 + 6x + 6\big),$$
$$\int \mathrm{d}x \;\; x^4 e^{-x} = -e^{-x}\big(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24\big),$$

1. $p = 0.824$
2. $p = 0.248$
3. $p = 0$, car l'état $2s$ a un rayon $r_2 = 4a_0$.
4. $p = 0.428$